جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و هفتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۸

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
–	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دو است که قدر مطلق آن در سه نقطه‌ی ۱-، ۰ و ۱ کمتر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر $x \in [-۱,۱]$، $|p(x)| \leq \frac{۵}{۴}$

۲- یک باغ مربعی شکل را به یک شبکه‌ی ۵۰×۵۰ از قطعات ۱ متر در ۱ متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار است و یک درخت سیب وجود دارد. به‌علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطع را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.)
نشان دهید تعداد قطعات خالی از ۱۰۰۰ تا بیش‌تر نیست.

۳- فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A از مثلث ABC ضلع BC را در D و دایره‌ی محیطی مثلث را در M قطع کند. از D خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط MB و MC (با نقطه‌ی شروع M) را در نقاط P و Q قطع کند. ثابت کنید $\angle PAQ \geq \angle A$.

۴- $n(n+۲)$ سرباز تازه‌کار در n ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد. یا به یکی از چهار جهت یک قدم بر می‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در $n+۲$ ستون برابر، به شکل منظم، قرارگرفته‌اند، به‌نحوی‌که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید n زوج است.

۵- A و اعداد طبیعی $a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n$ دارای این خاصیت هستند که برای هر i و j متمایز، $a_j - a_i$ بر a_i بخش‌پذیر است.
نشان دهید که برای هر $i < j$، $ia_j \leq ja_i$

۶- ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده است؛ ممکن است برخی کارت نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد درصورتی‌که اگر شماره‌ی آن کارت i باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت $i-۱$، i، $i+۱$ تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲، کارت شماره‌ی ۱ است!).
فرض کنید که در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۸

۱- دقت کنید:

$$p(x)=ax^۲+bx+c=\frac{x(۱+x)}{۲}(a+b+c)-\frac{x(۱-x)}{۲}(a-b+c)+(۱-x^۲)c$$
$$=\frac{x(۱+x)}{۲}p(+۱)-\frac{x(۱-x)}{۲}p(-۱)+(۱-x^۲)p(۰)$$

اگر $۰\le x\le ۱$ باشد، آنگاه:

$$\left|ax^۲+bx+c\right|\le\frac{x(۱+x)}{۲}+\frac{x(۱-x)}{۲}+(۱-x^۲)=\frac{۵}{۴}-(\frac{۱}{۲}-x^۲)\le\frac{۵}{۴}$$

و اگر $-۱\le x\le ۰$:

$$\left|ax^۲+bx+c\right|\le-\frac{x(۱+x)}{۲}-\frac{x(۱-x)}{۲}+(۱-x^۲)=\frac{۵}{۴}-(\frac{۱}{۲}+x)^۲\le\frac{۵}{۴}$$

این نشان می‌دهد که برای هر x در بازه‌ی $[-۱,۱]$ $\left|p(x)\le\frac{۵}{۴}\right|$. ضمناً با توجه به این نابرابری‌ها تساوی زمانی رخ می‌دهد که:

الف. $p(x)=\pm(x^۲-x-۱)$ در $x=+\frac{۱}{۲}$.

ب. $p(x)=\pm(x^۲+x-۱)$ در $x=+\frac{۱}{۲}$.

۲- فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ به ترتیب نمایانگر تعداد درختان سیب، درختان انار، درختان هلو و خانه‌های خالی باشند. دقت کنید که هر خانه‌ی خالی، هر درخت هلو و هر درخت انار یک هم سایه‌ی سیب دارند. همچنین با توجه به تعداد سیب‌ها که $a_۱$ است، حداکثر $۴a_۱$ زوج خانه‌ی هم سایه می‌توان یافت که یکی از آن‌ها درخت سیب باشد و دیگری درخت سیب نباشد. پس $۴a_۱\ge a_۲+a_۳+a_۴$. اگر شمارش مشابهی را برای تعداد زوج خانه‌های مجاوری که دقیقاً یکی از آن‌ها درخت انار و دیگری درخت هلو و یا خالی باشد، می‌بینیم که هر خانه‌ی خالی و هر درخت هلو یک همسایه‌ی انار دارد و از طرف دیگر با توجه به این‌که هر درخت انار یک همسایه‌ی سیب دارد، حداکثر سه تا از همسایه‌های یک درخت انار می‌توانند هلو و یا خالی باشند. درنتیجه حداکثر $۳a_۲$ زوج خانه‌ی مجاور با این خاصیت می‌توان یافت و لذا با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $۲a_۳\ge a_۴$.

بنابراین

$$۲a_۳\ge a_۴ \qquad\Rightarrow a_۳\ge\frac{a_۴}{۲}$$
$$۳a_۲\ge a_۳+a_۴\ge\frac{a_۴}{۲}+a_۴=\frac{۳}{۲}a_۴ \qquad\Rightarrow a_۲\ge\frac{a_۴}{۲}$$
$$۴a_۱\ge a_۲+a_۳+a_۴\ge\frac{a_۴}{۲}+\frac{a_۴}{۲}+a_۴=۲a_۴\Rightarrow a_۱\ge\frac{a_۴}{۲}$$

پس در کل با توجه به این‌که $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴=۵۰\times۵۰=۲۵۰۰$ داریم:

$$۲۵۰۰=a_۱+a_۲+a_۳+a_۴\ge\frac{a_۴}{۲}+\frac{a_۴}{۲}+\frac{a_۴}{۲}+a_۴=\frac{۵}{۲}a_۴\Rightarrow ۱۰۰۰\ge a_۴$$

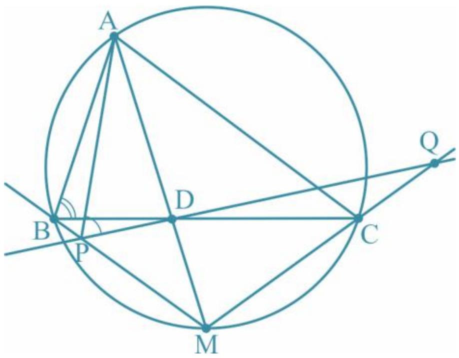
و به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۳- با توجه به که AM نیم ساز زاویه‌ی BAC است، داریم:

$$\angle DBM=\angle CBM=\angle MAC=\frac{\angle BAC}{۲}=\angle BAM$$

پس دایره‌ی محیطی مثلث ABD در B بر BM مماس است و درنتیجه نقطه‌ی P که روی این خط مماس قرار دارد. نمی‌تواند درون دایره باشد. بنابراین $\angle APQ=\angle APD\le\angle ABD=\angle B$. (اگر T را نقطه‌ی ی دیگر تقاطع PD با دایره‌ی محیطیABD بگیریم، زاویه‌ی $\angle ATP$ که برابر $\angle ABD$ است زاویه‌ی خارجی مثلث APT خواهد بود و بنابراین از $\angle APD$ کم‌تر نیست.
با استدلال کاملاً مشابه می‌توان فهمید $\angle AQP\le\angle C$. پس در کل:

$$\angle PAQ=۱۸۰^\circ-\angle APQ-\angle AQP\ge ۱۸۰^\circ-\angle B-\angle C=\angle A$$



۴- ادعا می‌کنیم این عمل برای عدد طبیعی $a>۲$ امکان‌پذیر است، اگر و تنها اگر برای $a-۲$ امکان‌پذیر باشد. فرض کنید برای بیان چهار جهت از چهار واژه‌ی "بالا"، "پایین"، "چپ" و "راست" استفاده کنیم. دقت کنید که اگر n ستون $n+۲$تایی بخواهد به ستون $n+۲$تایی تبدیل شوند، نفرات سطر بالا باید حتماً یک واحد به پایین حرکت کنند و نفرات پایین باید حتماً یک واحد به بالا بروند. به همین ترتیب نفرات سمت راست باید یک‌قدم به سمت چپ بروند و نفرات سمت چپ یک واحد به سمت راست بیایند. (البته به‌غیراز نفر بابایی و پایینی این ستون‌ها بالا و پایین هستند و حرکتشان توضیح داده شد.) حال به بقیه‌ی سربازها توجه کنید. آن‌ها شامل $n-۲$ ستون، nتـایی هستند که باید به n ستون $n-۲$ تایی تبدیل شوند. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. بنابراین با تکرار چند باره‌ی این ادعا می‌توان دید که اگر n عددی زوج باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها برای $n=۲$ قابل انجام باشد. همچنین اگر n عددی فرد باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای $n=۱$ قابل انجام باشد. این کار برای $n=۱$ قابل انجام نیست، زیرا دو سرباز کناری هر دو تنها می‌توانند به خانه‌ی وسط بیایند و این امکان ندارد. اما در مورد $n=۲$ به‌سادگی می‌توان دید که این کار قابل انجام است. پس این کار تنها زمانی ممکن است که n زوج باشد.

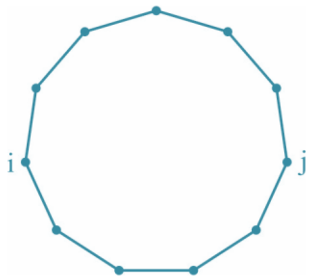
۵- برای هر زوج $i<j$ از اعداد طبیعی متمایز، می‌دانیم که $a_j-a_j\,\big|\,a_j$ و با توجه به اکیداً صعودی و طبیعی بودن a_iها:

$$a_j>a_j-a_۱>a_j-a_۲>\dots .a_j-a_i$$

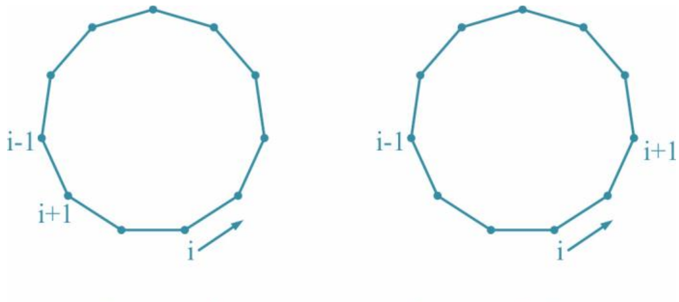
از طرف دیگر همه‌ی جمله‌های بالا مقسوم‌علیه a_j هستند. بنابراین اگر $a_j>b_1>\ldots>b_k$ همه‌ی مقسوم‌علیه‌های a_j باشند، خواهیم داشت $a_j-a_i\le b_i$ حال ازآنجاکه b_i، $i+۱$ امین مقسوم‌علیه بزرگ a_j است، $b_i\le\frac{a_j}{i+۱}$ و بنابراین در کل:

$$a_j-a_i\le b_i\le\frac{a_j}{i+۱}\Rightarrow(i+۱)(a_j-a_i)\le a_j\Rightarrow(i+۱)a_i\le ja_i$$

۶- ابتدا میز را به ۱۱ کمال برابر تقسیم کنید. حال اگر کارت‌های i و j در دو نقطه‌ی از جدول باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها را تعداد کمان‌های بین نقاط آن دو می‌گیریم (تعداد کمان‌های کم‌تر(. به‌طور مثال در شکل زیر فاصله‌ی دو کارت i و j برابر ۵ است.



حال بعد از هر مرحله مجموع فاصله‌های کارت‌های با شماره‌های متوالی را محاسبه می‌کنیم. (دقت کنید که کارت ۱۱ با ۱ شماره‌ی متوالی دارند!) اگر محل کارت i در کمان کوچک‌تر بین $i+1$ و $i-1$ باشد، این مقدار تغییر نمی‌کند. (زیرا فاصله‌ی $i+1$ و $i-1$ تغییر نمی‌کند، اما در بین فاصله‌ی i و $i+1$ و همین‌طور i و $i-1$، از یکی یک واحد کم می‌شود و به دیگری یک واحد اضافه می‌گردد) و در غیر این صورت دو واحد تغییر می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



مجموع فاصله تغییر نمی کند. دو واحد تغییر می کند.

بنابراین زوجیت این مقدار همواره ثابت می‌ماند. در ابتدا این مقدار برابر ۱۱ است و اگر قرار باشد همه‌ی کارت‌ها در یک نقطه‌ی جمع شوند، این مقدار باید برابر صفر شود که امکان ندارد.